ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 55, No. 1, 1986

UNE INEGALITE DU TYPE DE SLEPIAN ET GORDON SUR LES PROCESSUS GAUSSIENS

PAR
JEAN-PIERRE KAHANE
Unité Associée 757, Analyse Harmonique, Mathématique (Bât. 425), Université de Paris — Sud, 91405 Orsay Cedex, France

ABSTRACT
A new proof and extension of the Slepian–Gordon inequality is given.

THÉORÈME. *Soit $X = (X_j)$ et $Y = (Y_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ deux vecteurs gaussiens, tels que*

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} E(X_jX_k) \leqq E(Y_jY_k) & si\ (j,k) \in A, \\ E(X_jX_k) \geqq E(Y_jY_k) & si\ (j,k) \in B, \\ E(X_jX_k) = E(Y_jY_k) & si\ (j,k) \notin A \cup B. \end{cases}$$

Soit $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}^n$, dont les dérivées secondes (au sens des distributions) satisfont

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{ll} D_{jk}f \geqq 0 & si\ (j,k) \in A, \\ D_{jk}f \leqq 0 & si\ (j,k) \in B. \end{array}$$

Alors

$$\text{(3)} \qquad Ef(X) \leqq Ef(Y).$$

DÉMONSTRATION. Comme à l'ordinaire, on suppose $X \perp Y$ et on pose $X(t) = \sqrt{1-t}X + \sqrt{t}Y$ et $\varphi(t) = Ef(X(t))$. On a

$$\text{(4)} \qquad \varphi'(t) = \sum_j E((D_jf)(X(t))X_j'(t)).$$

Reçu le 31 décembre 1985

Fixons t et j, et montrons que l'espérance écrite au second membre est $\geqq 0$. On a

$$E(X_k(t)X'_j(t)) = \tfrac{1}{2}E(Y_kY_j - X_kX_j).$$

On peut donc écrire, d'après les hypothèses (1),

$$X_k(t) = \alpha_k X'_j(t) + W_k, \qquad W_k \perp X'_j(t)$$

avec $\alpha_k \geqq 0$ si $(j,k) \in A$, $\alpha_k \leqq 0$ si $(j,k) \in B$, $\alpha_k = 0$ si $(j,k) \notin A \cup B$. Considérons $E((D_jf)(X(t))X'_j(t))$ comme fonction des α_k (correspondant à $(j,k) \in A \cup B$). D'après (2), c'est une fonction croissante des α_k tels que $(j,k) \in A$, et décroissante des α_k tels que $(j,k) \in B$. Or cette fonction est nulle si tous les α_k sont nuls, puisque

$$E(D_jf)(W)X'_j(t)) = E((D_jf)(W))E(X'_j(t)) = 0.$$

Donc la somme de la série (4) est positive (au sens large), d'où $\varphi(0) \leqq \varphi(1)$ ce qui démontre le théorème.

Cas particuliers. Le "lemme de Slepian" correspond à $A = \{(j,k) \mid j \neq k\}$, $B = \emptyset$, $f = 1_G$, où G est un produit de demi-droites $]-\infty, \lambda_j[$. Le théorème 1.1 de Y. Gordon dans [1], qui généralise le lemme de Slepian, correspond à une partition de $\{1,2,\dots,N\}$ en classes I; en désignant par $I(j)$ la classe contenant j, on choisit

$$A = \{(j,k) \mid I(j) \neq I(k)\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(j,k) \mid I(j) = I(k), j \neq k\}$$

et $f = 1_G$, où $G = \bigcap_I \bigcup_{j \in I}(x_j > \lambda_j)$.

La preuve s'adapte pour obtenir d'autres inégalités. En voici une qui est essentielle dans l'étude des processus log-normaux [2].

THÉORÈME. *Soit $(X_t)_{t\in T}$ et $(Y_t)_{t\in T}$ deux processus gaussiens centrés indexés par T, $\sigma(dt)$ une mesure positive bornée sur T, f une fonction croissante convexe sur $\mathbf{R}^+$. On pose*

$$P_t = \exp(X_t - \tfrac{1}{2}EX_t^2) \qquad \textit{et} \qquad Q_t = \exp(Y_t - \tfrac{1}{2}EY_t^2).$$

Si $EX_tX_s \leqq EY_tY_s$ quels que soient t et s, on a

$$Ef\left(\int P_t\sigma(dt)\right) \leqq Ef\left(\int Q_t\sigma(dt)\right).$$

RÉFÉRENCES

1. Y. Gordon, *Some inequalities for Gaussian processes and applications*, Isr. J. Math. **50** (1985), 265–289.

2. J.-P. Kahane, *Le chaos multiplicatif*, à paraître aux Ann. Sci. Math. du Québec.